

일방향 주기적 진동상태인 원통 내부 유체의 유동 및 열전달에 대한 점근해석

박준상*†

Asymptotic Analysis of Flow and Heat Transfer on the Fluid in Uni-Directional Periodic-Oscillating Cylinder

Jun Sang Park*†

Key Words : Cool-down process(냉각프로세스), Natural convection(자연대류), Periodical oscillation(주기적 진동), Thermal oscillating flow(열적진동류)

ABSTRACT

A study is made of time-dependent flow and heat transfer of an incompressible Boussinesq fluid in an oscillating infinite cylinder along the horizontal axis under micro-gravity environment. The flow and heat transfer are initiated by forcing a periodic oscillation on the cylinder containing an incompressible fluid and, simultaneously, imposing an abrupt change of wall temperature. For the asymptotic analysis, Boussinesq approximation is adopted. Assuming the approximation of high Reynolds number ($Re \gg 1$), small magnitude of thermal expansion of the fluid ($\epsilon \ll 1$) and moderate amplitude of the oscillation (δ), a theoretical asymptotic analysis has been performed on flow and temperature field. The results clarify the reason why heat transfer could be augmented along the axis of oscillation. The predictions are consistent with the previous numerical results.

1. 서 론

초기온도(T_i^*)로 등온 상태인 액체를 담고 있는 Fig. 1과 같은 원통형 용기를 생각하자. 본 연구에서는 앞서 언급한 문제에서 용기 벽의 온도를 액체와 같은 온도상태(T_i^*)에서 또 다른 온도(T_w^*)로 변화시킨 후 일어나는 유동 및 열전달에 대한 과도상태의 문제를 다룬다. 특히 우주공간에서와 같이 중력효과가 미미한 환경을 고려한다.

만약, 중력효과를 무시한다면 용기벽의 온도변화가 내부 유체에 역학적인 힘을 발생시키지 않아, 즉, 중력효과에 의한 부력이 작용하는 자연대류 열전달 문제와 다른 단순한 열확산에 의한 열전도 문제가 된다. 우주공간에서와 같은 미소중력환경 하에서는 중력의 작용에 의한 부력이 생성되는 지상과 비교할 때 열전달이 매우 느리게 일어난다. 따라서 우주환경 하의 열전달 촉진 기술개발은 미소중력 유체역학(micro gravity fluid mechanics) 분야의 주요 연구 테마 중

하나이다.⁽¹⁾ 특히, 본 연구에서 다루고자 하는 무중력 환경에서의 외부가진 열전달 문제는 우주 구조물이 비행하면서 겪게 되는 진동, 즉, G-gitter 문제와 밀접한 관련이 있고, 이것은 우주환경을 이용한 재료공정 연구에서 매우 중요하다.⁽⁵⁾

본 연구에서는 무중력 환경에서 열전달을 촉진하는 방법으로 밀폐된 원통형 용기 내부에 들어있는 상온 상태의 액체를, 원통형 용기 벽의 온도를 순간적으로 변화시키면서 동시에 수평방향으로 주기적인 일방향 진동을 가하여 냉각(cool-down)시키는 문제를 다루고자 한다. 용기에 대한 외부가진 내부유체에 인위적인 체적력을 만들어 이를 이용하여 열전달을 촉진하는 방법 중 하나이다 [Fig. 1 참고].

상기 문제에 대한 수치적인 연구는 Park⁽²⁾의 연구에 의해서 넓은 범위의 가진강도에 대해 이루어졌다. Park⁽²⁾은 수치해석을 통해 가진강도에 따라 4가지 유동 및 열전달 모드가 존재한다는 것을 밝혔다.

* 한라대학교 기계자동차공학부

† 교신저자, E-mail : jspark@halla.ac.kr

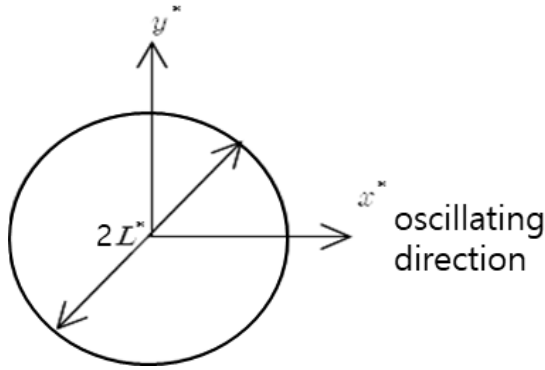


Fig. 1 Coordinate system

4가지 모드 중 가진강도가 상대적으로 가장 약한 경우에는 열전달 축진이 가진축 방향(수평방향)으로 일정한 패턴을 그리며 Fig. 2에서와 같이 일어난다는 것을 밝혔다. Fig. 2는 Park⁽²⁾이 설명한 가진강도가 가장 약한 경우에 나타나는 1-열섬모드(1-thermal island mode)에 대한 수치해석 결과이다. 작동유체를 물로 하고, 물성치는 15°C에서의 값으로 사용한 수치계산 결과가 Fig. 2의 결과이다. 과도상태에 대한 등온선 변화는 진동방향으로 열전달이 촉진된다는 앞서의 설명을 명확히 보여준다.

본 논문의 목적은 이론해석을 통해 Fig. 2의 결과에 대한 보다 자세한 물리적인 해석과 현상에 대한 이유를 밝히는 것이기 때문에 Fig. 2의 결과에 대한 수치해석 방법론 및 설명은 생략한다. 보다 상세한 내용은 Park⁽²⁾을 참고하기 바란다.

이전의 관련 연구를 살펴보면 중력장 하에서 일어나는 열적진동유동(thermal oscillating flow)에 대한 연구가 Gershuni & Lyubimov⁽³⁾의 저서에 광범위하게 나와 있다. 대부분의 연구가 진동하는 용기의 외부유동에 대한 것이고 내부유동인 경우 초기 성층화된 유체에 대한 연구가 대부분이다. 그리고 무중력 상태에 대한 이전에 행해진 연구를 살펴봐도 대부분의 연구가 외부유동 문제에 국한되어 있다는 것을 알 수 있다.⁽⁴⁾

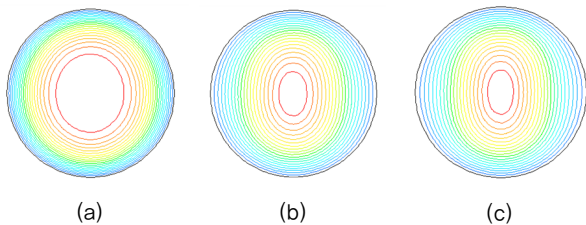


Fig. 2 Transient pattern of isothermal lines. ($T_i^* = 30^\circ\text{C}$, $T_w^* = 5^\circ\text{C}$) Times, t^* , are (a) 2.8 s, (b) 8.4 s and (c) 14 s. $A^* = 0.1$ and $f^* = 5$. (see the chapter 2 for variable definition)

이전 연구를 살펴보면 본 연구에서 다루는 문제와 같은 초기 등온 정적평형 상태에서 또 다른 등온 정적평형상태로 가는 과도문제는 Park⁽²⁾이 수행한 수치해석적 연구가 처음이고, 본 연구에서 목적으로 하는 이론연구는 없었다.

본 연구에서는 문제의 정의로부터 도출되는 열전도에 대한 긴 간척도(long timescale)와 외부가진에 의한 짧은 시간척도(short timescale)의 이중시간척도를 도입하고, 유동특성을 지배하는 레이놀즈수가 매우 크다는 가정을 통해 2차원 이중시간척도 점근해석(two timescale asymptotic analysis)을 수행했다. 그 결과 이전 수치해석 결과를 상세히 설명할 수 있는 이론적 결과를 얻었다.

2. 지배방정식

Boussinesq 유체를 담고 있는 반경 L^* 인 실린더형 원통을 생각하자 [Fig. 1 참조]. 동점성 계수 ν , 열확산 계수 α 를 갖는 원통 내부의 유체는 초기에 원통의 초기 온도와 같은 등온상태로 정적인 초기상태를 유지하는 것으로 가정한다.

본 연구에서는 초기상태(T_i^*)의 액체를 담고 있는 원통의 온도를 갑자기 T_w^* 로 냉각시킨 후, 동시에 원통을 x^* 축-방향(수평방향)으로 주기적으로 ($u_w^* = A^* \sin(2\pi f^* t^*)$, $v_w^* = 0$)와 같이 흔들면서, 내부 유체의 온도변화를 고찰하고자 한다. 여기서 u 와 v 는 x, y 축 방향의 속도성분을, f 는 가진주파수를 의미한다. 그리고 상첨자 *는 차원변수, 하첨자 i, w 는 액체의 초기상태 및 용기를 의미한다.

작동유체의 물성은 Boussinesq 가정을 통해 온도변화에 따른 밀도변화 효과를 다음과 같이 고려했다.

$$\rho^* = \rho_i^* (1 - \beta(T^* - T_i^*)), \quad (1)$$

여기서 β 는 유체의 열팽창계수를 나타낸다.

수평, 수직속도(u, v), 온도(T), 압력(p) 및 좌표계(x, y, t)에 대해 아래와 같은 무차원화를 수행하면,

$$\begin{aligned} (x, y) &= (x^*/L^*, y^*/L^*), t = t^* f^*, \\ (u, v) &= (u^*/f^* L^*, v^*/f^* L^*), T = (T^* - T_i^*) / (T_i^* - T_w^*), \\ p &= p^* / \rho_i^* (f^* L^*)^2 \end{aligned}$$

이 된다.

상기 무차원 변수를 이용하여 용기와 같이 움직이는 이동 좌표계에 대한 무차원 지배방정식을 구하면

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{R_e} \nabla^2 u - 2\pi\delta(1-\epsilon T)\cos(2\pi t) \quad (3)$$

$$\frac{Dv}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{R_e} \nabla^2 v \quad (4)$$

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{1}{P_r R_e} \nabla^2 T \quad (5)$$

이 된다.

위 방정식에서 밀도변화의 영향은 식 (3)의 우변에 나타나는 체적력항에 대해서만 고려했다(관성좌표계에서 이동좌표계로 변환하면 나타나는 두 체적력 항, $\rho(2\pi\delta)\cos(2\pi t)$ 와 $\rho\delta\sin(2\pi t)\partial u/\partial x$, 중 한 차수 더 큰 첫째항만을 고려했다). 그리고 에너지방정식 (5)에서 소산항은 무시했다. 이것이 자연대류 열전달문제에서 중력항에 대해서만 밀도변화를 고려하는 Boussinesq 근사와 같다. Boussinesq 근사에 대한 보다 상세한 내용은 Zetounian⁽⁶⁾의 review paper를 참고하기를 바란다.

위 지배방정식에 나타난 무차원수는 다음과 같이 정의된다. $\epsilon \equiv \beta\Delta T$, $\delta \equiv A^*/f^*L^*$, $R_e \equiv f^{*2}L^*/\nu$, $P_r \equiv \alpha/\nu$. 여기서 $\nu \equiv \mu/\rho_i^*$, $\Delta T = T_i^* - T_w^*$ 이다. 물리적으로 이들 무차원수는 다음과 같이 설명될 수 있다: ϵ 은 온도변화에 의한 유체의 체적팽창량, δ 는 용기의 직경과 진동 변위의 비, R_e 는 레이놀즈수 그리고 P_r 은 프란틀수를 나타낸다.

지배방정식 (2)~(5)와 관련된 초기 및 경계조건은 다음과 같다.

$$u(x,y,t=0) = v(x,y,t=0) = 0, T(x,y,t=0) = 0, \quad (6)$$

$$u(x^2+y^2=1,t) = v(x^2+y^2=1,t) = 0, \quad (7a)$$

$$T(x^2+y^2=1,t) = -1, \quad (7b)$$

3. 이론해석

3.1 2-변수 전개 해석

본 문제에서 다루고자 하는 파라미터 영역은 $R_e \gg 1$, $P_r \sim O(1)$, $\delta < O(1)$, $\epsilon < O(1)$ 이다. 즉, 유동에 의해 발생하는 경계층의 두께가 용기의 길이척도에 비해 매우 작은 경우이다. 따라서 용기 내부 대부분의 유동영역(bulk zone)을 비점성 영역으로 가정할 수 있다. 이론해석은 이 영역에 대해 과도상태에서 발생하는 온도변화를 예측하는데 초점을 맞출 것이다.

물리적인 관점에서 살펴보면 본 문제에서 다루는 유동 및 열전달 현상이, $R_e \gg 1$ 인 경우를 고려하면, 에너지방정식 [식 (5)]으로 부터 구할 수 있는 열확산 시간척도, 즉, 긴시간 변수(long time variable) $\tilde{t} = t/R_e$ 와 운동량방정식[식 (3)]의 우변에 나타나는 강제항 (forcing term) $-2\pi\delta(1-\epsilon T)\cos(2\pi t)$ 으로 부터 구할 수 있는 짧은 시간변수(short time variable) t 에 관계하는 이중시간척도 문제인 것을 알 수 있다.

따라서 지배방정식의 좌변에 나타나는 시간미분항은 다음과 같이 2-변수 전개법(two variable expansion method)으로 처리할 수 있다.

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{R_e} \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \quad (8)$$

따라서 근사해를 구하기 위해 앞서 파라미터 $\epsilon(\epsilon \ll 1)$ 을 점근해석을 위한 매우 작은 섭동파라미터(perturbation parameter)로 이용하고 지배방정식 (2)~(5)와 초기 및 경계조건 (6), (7)을 만족하는 다음의 급수해를 생각하자.

$$u = U_0 + \epsilon U_1 + \epsilon^2 U_2 + \dots, \quad (9a)$$

$$v = V_0 + \epsilon V_1 + \epsilon^2 V_2 + \dots, \quad (9b)$$

$$p = P_0 + \epsilon P_1 + \epsilon^2 P_2 + \dots, \quad (9c)$$

$$T = T_0 + \epsilon T_1 + \epsilon^2 T_2 + \dots, \quad (9d)$$

식 (9a)~(9d)를 지배방정식 (2)~(7)에 대입하고, 각 차수의 해를 구하면 다음과 같다.

3.1.1 0-차해

경계조건(7a)와 식 (2) & (4)로부터

$$U_0 = V_0 = 0, \quad (10)$$

을 얻을 수 있다. 사실 속도장에 대한 0-차해는 밀폐된 용기를 채우고 있는 밀도 일정한 비압축성 유체의 운동이 고체의 운동과 같다는 물리적인 사실로부터도 쉽게 유도할 수 있다.

압력에 대한 해를 구하기 위해 식 (10)을 식 (3)에 대입하면 P_0 에 대한 방정식

$$\frac{\partial P_0}{\partial x} = -2\pi\delta\cos(2\pi t) \quad (11)$$

이 구해진다. 따라서 P_0 에 대한

$$P_0 = -2\pi\delta\cos(2\pi t)x \quad (12)$$

의 해를 구할 수 있다.

온도에 대한 0-차 방정식과 초기 및 경계조건은 식 (5), (6) & (7b)로부터

$$\frac{\partial T_0}{\partial \tilde{t}} = \frac{1}{P_r} \nabla^2 T_0, \quad (13)$$

$$T_0(\tilde{t}=0, x, y) = 0, T_0(\tilde{t}, x^2 + y^2 = 1) = -1, \quad (14)$$

와 같이 얻을 수 있고, 식 (13)으로 나타나는 열전도방정식에 대한 해를 구하면

$$T_0 = -1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{\beta_n^2}{P_r} \tilde{t}\right) \frac{J_0(\sqrt{x^2 + y^2} \beta_n)}{\beta_n J_1(\beta_n)} \quad (15)$$

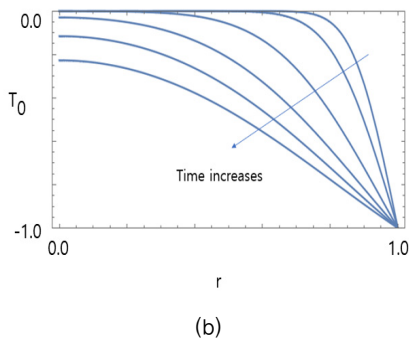
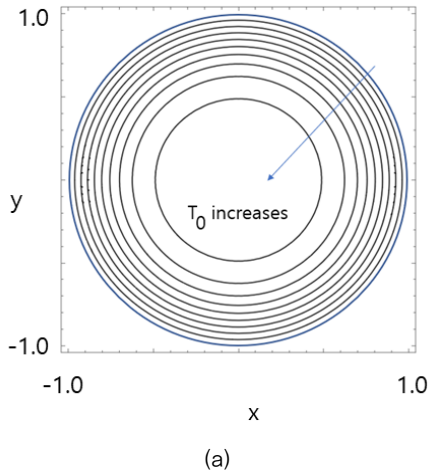


Fig. 3 Behavior of the 0-th order temperature T_0 . ($P_r = 8.0$)

(a) Isothermal contours at $T_0 = 0.0, 0.1, 0.2, \dots, 0.9$.

(b) Temperature distributions along radial direction ($r = \sqrt{x^2 + y^2}$) when $\tilde{t} = 0.05, 0.1, 0.3, 0.6, 0.9, 1.2$.

의 고전적인 해를 얻는다.⁽⁷⁾ 여기서 β_n 은 0-차 Bessel 함수의 n 번째 0-차 해이다.

이후의 그림에 나오는 모든 급수해 계산은 Mathematica를 이용해 수행했고 급수의 30번째 항까지 덧셈을 수행한 결과임을 밝혀둔다. 그리고 Prandtl 수는 15°C , 1기압 물을 기준으로 $P_r = 8.0$ 으로 고정했다.

식 (15)에 주어진 0-차 해(T_0)는 예상한 것처럼 긴시간 변수 \tilde{t} 에만 의존하는 정지한 유동에 대한 단순 열전도 방정식의 해이다. 시간이 지남에 따라 축대칭 형태의 냉각이 내부로 서서히 진행되어가는 것을 Fig. 3에서 확인할 수 있다.

3.1.2 1-차해

$R_e \gg 1$ 인 경우 식 (3) & (4)의 우변의 두 번째 항은 벽 근처의 경계층을 제외한 대부분의 유동영역에서 무시해도 좋을 만큼 작다. 그러나 이 항은 벽면근처의 $O(R_e^{-1/2})$ -두께의 경계층에서는 그 크기가 다른 항과 비슷해 무시할 수 없고, 수학적인 관점에서 볼 때 이 항이 미분의 최고차항이기 때문에 벽면경계조건을 위해 필요하다. 그러나 본 연구에서는 유동영역의 대부분을 차지하는 내부 비점성영역에서의 온도장에 대해 관심이 있기 때문에 이후의 해석에서 점성항을 생략하고, 경계층 영역에 대한 자세한 해석은 생략한다.

식 (8) & (9)를 식 (3) & (4)에 대입하여 1-차 방정식을 구하면

$$\frac{\partial U_1}{\partial t} = -\frac{\partial P_1}{\partial x} + 2\pi\delta T_0 \cos(2\pi t), \quad (16)$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial t} = -\frac{\partial P_1}{\partial y}, \quad (17)$$

을 얻을 수 있다.

식 (16) & (17)과 식 (2)로부터 P_1 에 대한 방정식을 구하면,

$$\nabla^2 P_1 = 2\pi\delta \frac{\partial T_0}{\partial x} \cos(2\pi t) \quad (18)$$

을 얻을 수 있다. 식 (18)의 해 P_1 의 해석해를 직접 구하기는 힘들고 수치 해석적인 방법이 필요하다. 그러나 여기서는 식 (18)의 해를 직접적으로 구하는 대신 다른 이론적인 접근을 통해 Park⁽²⁾이 발견한 열전달 촉진 메커니즘을 설명할 수 있는 논리적 근거를 찾는 형태로 우회한다.

x -축($y=0$)과 y -축($x=0$)을 따라 식 (18)의 해를 구하면 다음과 같다.

(1) x -축($y=0$) 상의 P_1 해

$$\frac{\partial P_1(x,0)}{\partial x} = 2\pi\delta T_0(x,0)\cos(2\pi t), \quad (19a)$$

(2) y -축($x=0$) 상의 P_1 해

$$P_1(0,y) = 0. \quad (19b)$$

이제 식 (19a)와 (19b)를 식 (16) 우변의 첫째항에 넣고 U_1 을 계산하면

(1) x -축($y=0$) 위의 해

$$U_1(0,y) = 0, \quad (20a)$$

(2) y -축($x=0$) 위의 해

$$U_1(0,y) = \delta T_0(0,y)\sin(2\pi t), \quad (20b)$$

을 얻을 수 있다.

식 (20a)와 (20b)이 주는 물리적 의미는 다음과 같다. 무한 수직벽 사이에 갇힌 유체인 경우[상기 (1)의 경우]는 용기의 좌우교반과 x -축방향 온도 기울기가 있어도 가속도가 만드는 체적력과 온도변화에 의해 만들어지는 압력구배가 상쇄되어 유속이 발생하지 않는다. 반면, 무한 수평벽 사이에 갇힌 유체의 경우[상기 (2)의 경우]는 온도 기울기가 미미해 압력구배가 0에 가깝고 결과적으로 식 (16)의 우변 두 번째 항, 즉, 강제진동에 의한 체적력만 살아남아 식 (20b)와 같은 유동을 발생시킨다.

위 결과와 x -축에서 멀어질수록 $\partial T_0/\partial x$ 값이 급격히 작아지는 T_0 에 대한 등온선 그림[Fig. 3(a)]으로부터 x -축에서 먼 유동영역에서는 식 (16)의 우변 두 항의 크기가 $\left| \frac{\partial P_1}{\partial x} \right| \ll |2\pi\delta T_0\cos(2\pi t)|$ 인 것을 알 수 있다.

위 사실로부터 식 (16) 우변의 첫 번째 항을 무시하면 x -축에서 먼 점(0,1) 근처의 내부 비점성영역에 대한 수평방향 속도성분 U_1 구하면 다음과 같다.

$$U_1 = \delta T_0\sin(2\pi t). \quad (21)$$

그리고 식 (17)로부터

$$V_1 = 0, \quad (22)$$

를 얻을 수 있다.

결론적으로 점(0,1) 근처의 내부 비점성영역에서의 수평방향 속도성분 U_1 은 외부에서 가해지는 가진속도와 90° 의 위상차를 갖고 수평방향으로 주기적인 운동을 한다는 것을

알 수 있다. 물론 이와 같은 상대운동이 가능한 이유는 유체의 온도변화에 의한 지역적인 밀도변화 (local density variation)가 발생했기 때문이다 (이 효과는 식 (21)의 해에서 T_0 에 반영되어 있다).

내부 비점성영역에서 온도장에 대한 1-차 방정식은 식 (9)를 식 (5)에 대입하여 아래와 같이 얻을 수 있다.

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} + U_1 \frac{\partial T_0}{\partial x} = 0. \quad (23)$$

식 (21)를 식 (23)에 대입하고 해를 구하면

$$T_1 = \frac{\delta}{2\pi} \cos(2\pi t) T_0 \frac{\partial T_0}{\partial x}, \quad (24)$$

을 얻을 수 있다.

앞서 구한 1-차해를 살펴보면 벽면 온도변화가 전도 열전달을 통해 (0-차 해(T_0))를 통해 내부유체에서 축대칭 원형 형태의 온도변화를 일으키고[Fig. 3(a)], 이것이 다시 가진방향(x -축방향)으로 밀도구배(density gradient)를 일으켜 동시에 가진에 의해 발생하는 체적력의 지역적인 변화(local variation)를 발생시키고, 궁극적으로 유동(U_1)을 발생시킨다는 것을 알 수 있다.

내부 영역에서는 발생하는 유동(U_1)의 크기는 식(21)에서 볼 수 있듯이 0-차 온도(T_0)에 비례한다. T_0 는 변수 x 에 대해 우함수이고(y -축을 기준으로 좌우의 유체가 동일한 방향으로 움직인다는 의미) 시간에 따라 싸인함수로 형태의 운동을 한다는 점을 고려하면, 시간평균 관점에서 1-차 해 U_1 에 의해 발생하는 유동이 열전달을 직접 촉진하지는 않는다는 것을 알 수 있다.

위 사실은 온도에 대한 1-차해[식 (24)]에서 다시 확인할 수 있다. 식 (24) 우변에 나타나는 함수 값($T_0 \cdot \partial T_0/\partial x$)의 분포를 살펴보면 더욱 분명해진다. Fig. 4에서 알 수 있듯이

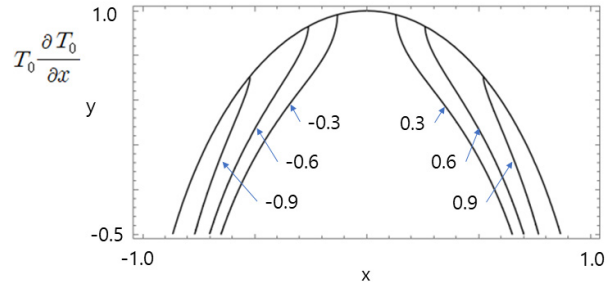


Fig. 4 Distribution of the function, $\frac{\partial}{\partial x} \left(T_0^2 \frac{\partial T_0}{\partial x} \right)$, value near the point (0,1) at $\tilde{t} = 0.05$, $P_r = 8.0$.

식 (24)에서 구한 T_1 은 시간평균 뿐만 아니라 공간평균 값도 0 인 함수이다. 결론적으로 주기운동에 의해 발생하는 1-차 해는 그 자체로는 열전달 촉진에 기여하지 않는다.

3.1.3 2-차해

2-차해에 대한 운동량방정식을 식 (3)으로부터 구하면

$$\frac{\partial U_2}{\partial t} + U_1 \frac{\partial U_1}{\partial x} = 2\pi\delta T_1 \cos(2\pi t), \quad (25)$$

이다. 식 (25)를 구할 때 1-차 해를 구할 때의 가정처럼 x -축에서 먼 내부 비점성영역을 고려해서 점성항과 압력항을 생략했다.

식 (21)을 식 (25)에 대입하고 유속 U_2 에 대한 2-차 해를 구하면

$$U_2 = \frac{\delta^2}{4\pi} T_0 \frac{\partial T_0}{\partial x} \sin(4\pi t) \quad (26)$$

이다. 식 (26)의 결과는 2-차해 U_2 의 주파수가 가진주파수의 2배가 된다는 것을 보여준다. 이것은 1-차해의 속도성분 U_1 및 $\frac{\partial U_1}{\partial x}$ 의 상호작용과 함께 1-차해의 온도성분 T_1 과 외부가진 상호작용으로 일어난 결과이다 [식 (25)참고].

이제 2-차해인 온도장 T_2 를 구하자. 식 (5)로부터 T_2 에 대한 2-차방정식을 구하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial T_2}{\partial t} + U_2 \frac{\partial T_0}{\partial x} + U_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} = 0 \quad (27)$$

식 (21), 식 (24)와 식 (26)을 식 (27)에 대입하고 T_2 를 구하면

$$\begin{aligned} T_2 &= -\delta \frac{\partial(T_0 T_1)}{\partial x} \sin(2\pi t) \\ &= -\frac{\delta^2}{8\pi^2} \frac{\partial}{\partial x} \left(T_0^2 \frac{\partial T_0}{\partial x} \right) \sin^2(2\pi t) \end{aligned} \quad (28)$$

을 얻을 수 있다.

3.2 시간평균해석

앞서 구한 이론해를 이용하여 1-cycle 가진에 대한 온도 평균값을 구하자.

외부가진 1-cycle 동안에 대한 온도의 시간평균값은 다음과 같이 주어진다.

$$\bar{T} = \bar{T}_0 + \epsilon \bar{T}_1 + \epsilon^2 \bar{T}_2 + O(\epsilon^3), \quad (29)$$

여기서 시간평균값 정의는 $\bar{\phi} = \int_t^{t+1} \phi(t, \tilde{t}, x, y) dt$ 이고, ϕ 는 온도에 대한 각 차수해를 의미한다.

각 차수의 온도에 대한 평균값을 구하면 식 (15)로부터 $\bar{T}_0 = T_0$ 이고, 식 (24)로부터 $\bar{T}_1 = 0$ 그리고 식 (28)로부터

$$\bar{T}_2 = \int_0^1 T_2(t, \tilde{t}, x, y) dt = -\frac{\delta^2}{16\pi^2} \frac{\partial}{\partial x} \left(T_0^2 \frac{\partial T_0}{\partial x} \right) \text{ 이다.}$$

따라서

$$\bar{T} = T_0 - \epsilon^2 \frac{\delta^2}{16\pi^2} \frac{\partial}{\partial x} \left(T_0^2 \frac{\partial T_0}{\partial x} \right) + O(\epsilon^3). \quad (30)$$

식 (30) 우변의 첫 번째 항은 단순 열전도방정식의 해이고, 두 번째 항은 수평가진에 의해 발생한 온도변화 효과이다. Fig. 5로부터 우변 두 번째 항($\epsilon^2 \bar{T}_2$)의 값이 +값이라는 것을 알 수 있다.

이것은 수평방향으로 교반가진을 가하는 경우 (0,1) 근처 비점성영역에 있는 내부유체는 단순 열전도문제에 비해 냉각이 느려진다는 것을 의미한다. 그 이유는 온도변화로 인해 발생하는 수평방향 속도성분 U_1 , U_2 때문이다. 경계층유동에서 벽면온도변화가 경계층을 가로질러 내부비점성영역 유체로 쉽게 전달되지 않는 경우와 같다. 벽면의 온도변화(냉각)에 의해 일어나는 유체와 벽사이의 열전달 통로가 수평방향 대류의 영향으로 벽에 평행한 방향을 따라 이루어지기 때문에 나타난 현상이다.

Figs. 4 & 5에서 비록 $0.5 \leq y \leq 1.0$ 영역에 대한 함수값을 그렸지만 이전의 이론전개 과정을 고려하면 여기서 구한 이론해의 엄밀성은 (0,1) 근처 영역에서 잘 맞는다는 점을 다시 한 번 강조한다.

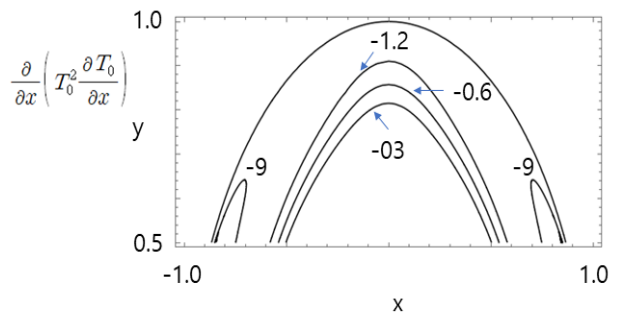


Fig. 5 Distribution of the function, $\frac{\delta^2}{16\pi^2} \frac{\partial}{\partial x} \left(T_0^2 \frac{\partial T_0}{\partial x} \right)$,

value near the point (0,1) at $\tilde{t} = 0.05$, $P_r = 8.0$.

이제 지금까지 구한 이론해 U_1, U_2 을 이용해 수치해석 결과(Fig. 2)에서 알 수 있는 점 (0,1)에서 먼 x -축에 가까운 내부 비점성영역 유체가 겪는 수평방향 열전달 촉진 현상을 설명하고자 한다.

수평가진이 가해진 경우 수평방향으로 열전달이 전도 열전달에 비해 더 빨리 일어나는 현상을 설명한다.

식 (24)와 식 (26)에 주어진 U_1, U_2 를 다시 쓰면

$$U_1 = \delta T_0 \sin(2\pi t), \quad U_2 = \frac{\delta^2}{4\pi} T_0 \frac{\partial T_0}{\partial x} \sin(4\pi t) \quad (31)$$

이다. 외부가진이 1-cycle 일어나는 동안을 짧은 시간 변수 t 관점에서 살펴보면, 식(31)의 싸인함수 앞에 있는 계수항수 δT_0 와 $\frac{\delta^2}{4\pi} T_0 \frac{\partial T_0}{\partial x}$ 는 준정상상태이다. 따라서 계수항수 δT_0 와 $\frac{\delta^2}{4\pi} T_0 \frac{\partial T_0}{\partial x}$ 는 고정된 \tilde{t} 값에 대해 공간변수 x, y 만의 함수로 생각할 수 있다.

계수항수의 부호는 x -축을 기준으로 유동영역 좌, 우에서 아래와 같다:

- (1) $-1 \leq x < 0$ 에서는 $\delta T_0 < 0, \frac{\delta^2}{4\pi} T_0 \frac{\partial T_0}{\partial x} < 0,$
- (2) $0 < x \leq 1$ 에서는 $\delta T_0 < 0, \frac{\delta^2}{4\pi} T_0 \frac{\partial T_0}{\partial x} > 0.$

위 결과는 x -축을 기준으로 좌측영역($-1 \leq x < 0$)에서는 속도성분 U_1, U_2 가 동상(in-phase)으로 움직이고, 우측영역($0 < x \leq 1$)에서는 180도 위상차이가 나는 이상(out of phase)으로 움직인다는 것을 보여준다.

수평방향유속이 두 속도의 합산, 즉, $\epsilon U_1 + \epsilon^2 U_2$ 로 계산됨을 고려하고, 섭동파라미터의 크기가 적절히 작아 두 항의 크기가 비교될 정도일 때를 가정하면, 점(0,1) 근처 영역에서의 유동은 두 조화함수 $\sin(2\pi t)$ 와 $\sin(4\pi t)$ 의 (영역 $-1 \leq x < 0$ 에서는) 합으로, (영역 $-1 \leq x < 0$ 에서는) 차로 나타나는 특성을 갖는다는 것을 알 수 있다.

Fig. 6으로부터 두 함수 $\sin(2\pi t)$ 와 $\sin(4\pi t)$ 합과 차의 크기의 최대치가 다음 구간에서 일어난다는 것을 알 수 있다.

첫째는 동상인 경우이다. 이 경우 시간구간 $0 \leq t \leq 0.25$ 와 $0.75 \leq t \leq 1.0$ 에서 최대값이 나타난다. 이때 용기에 가해지는 가속도의 방향은 오른쪽이다. 식 (31)을 이용하여 수평유속 U_1, U_2 을 살펴보면 유동영역 왼쪽 ($-1 \leq x < 0$)에서는 서로 같은 방향(- 방향)이고, 유동영역 오른쪽 ($0 < x \leq 1$)에서는 서로 반대방향(U_1 은 - 방향, U_2 는 + 방

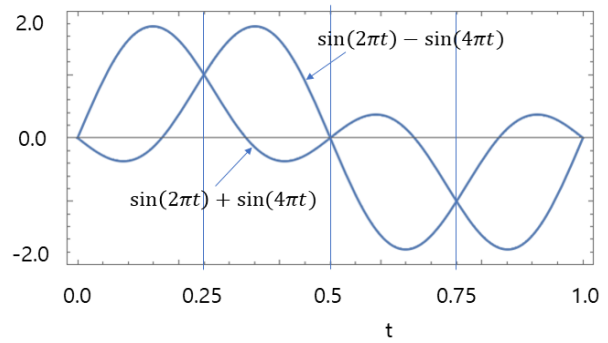


Fig. 6 Time history of two function arithmetic

향)이다. 다시 말해 시간구간 $0 \leq t \leq 0.25$ 와 $0.75 \leq t \leq 1.0$ 에서는 유동이 좌측영역($-1 \leq x < 0$)에서 활성화된다는 것을 의미한다.

두 번째는 이상인 경우이다. 이때는 최대치가 시간구간 $0.25 \leq t \leq 0.75$, 즉, 용기에 가해지는 가속도의 방향이 왼쪽을 향하는 시간 동안에 일어난다. 앞서의 설명과 동일한 이유로 시간구간 $0.25 \leq t \leq 0.75$ 동안에는 유동이 우측영역($0 < x \leq 1$)에서 활성화된다. 위 설명은 x -축에서 먼 점 (0,1) 근처의 경계층 밖 비점성영역에 대한 것이라는 사실을 다시 한 번 강조한다.

이상의 이론적인 분석을 바탕으로 전 유동영역에서 일어나는 유동특성에 대해 지금부터 살펴보자.

가진에 주기운동을 하는 용기가 오른쪽으로 가속되는 시간은 $0 \leq t \leq 0.25$ 와 $0.75 \leq t \leq 1.0$ 이다. 이때 벽근처의 경계층 내부에서는 벽면냉각에 의해 내부유체보다 밀도가 커진 유체가 더 큰 관성력을 받아 용기가 가속되는 반대방향(왼쪽, 즉, -방향)을 향하게 된다. 한편 경계층 밖 비점성영역에서는 유동이 시간구간 $0 \leq t \leq 0.25$ 에서는 왼쪽 방향(-방향), 시간구간 $0.75 \leq t \leq 1.0$ 에서는 오른쪽 방향(+방향)을 향한다 (이것은 앞서 구한 이론해로부터 쉽게 확인할 수 있다).

따라서 시간구간 $0 \leq t \leq 0.25$ 에서는 경계층 유동의 방향과 경계층 밖 비점성 영역 유동의 방향이 동일한 병류(cocurrent flow)가 형성되어, Fig. 7(a)에서와 같은 매우 큰 순환유동이 만들어진다. 상반부를 기준으로 설명하면 반시계 방향의 순환유동이 만들어지고 순환류의 중심을 좌측에 존재한다 (지금 논의하는 시간구간에서는 유동이 활성화되는 영역이 $-1 \leq x < 0$ 이라는 것을 상기하자).

반면 시간구간 $0.75 \leq t \leq 1.0$ 일 때는 경계층 유동은 - 방향을 향하고, 경계층 밖 비점성 영역의 유동은 +방향을 향하는 유동방향이 서로 반대인 countercurrent flow가 형성되어 전체적인 유동강도를 감소시켜 내부 전영역에 걸친 순환류를 만들지 않게 된다.

용기가 왼쪽으로 가속되는 시간 $0.25 \leq t \leq 0.75$ 동안에는 우측 유동영역 $0 < x \leq 1$ 에서 유동이 활성화된다. 이때 우측

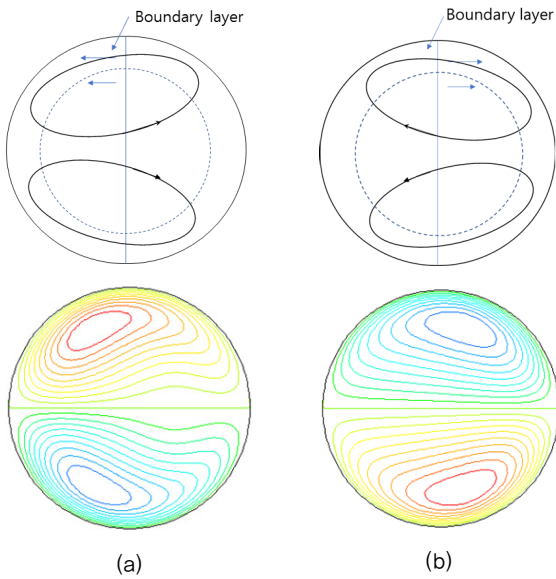


Fig. 7 Flow patterns : Schematics (upper frame) and Streamline of numerical result when $A^* = 0.025, f = 0.1$ & (a) $t = 0.2$, (b) $t = 0.7$ (lower frame).

유동영역에서도 앞서와 같은 이유로 시간구간 $0.25 \leq t \leq 0.5$ 에서는 경계층유동과 경계층 밖 비점성 유동이 서로 반대인 countercurrent flow가 형성되어 내부영역의 유동이 약화되고, 시간구간 $0.5 \leq t \leq 0.75$ 에서는 병류(cocurrent flow)가 발생하여 Fig. 7(b)에서와 같은 상반부를 기준으로 매우 큰 시계방향 순환유동이 만들어지고 순환유동의 중심은 우측에 존재하게 된다[Fig. 6(b)].

결과적으로 1 주기 동안 번갈아 발생하는 두 순환유동에 의한 대류효과가 x -축 방향으로의 열전달을 촉진해서 Fig. 2에서와 같이 가진방향으로 냉각을 촉진하게 된다.

이상의 이론적인 설명은 수치계산 결과와 비교한 Fig. 6에서 명확히 확인할 수 있다.

4. 결 론

무중력 상태의 원통형 밀폐용기 내부에 들어있는 등은 상

태의 액체를 일방향 주기적인 진동과 용기벽의 온도를 동시에 내려 냉각시키는 문제를 해석했다.

상기 문제는 무중력 상태에서는 온도변화만으로 지상에서와 같이 자연대류 열전달 효과를 기대할 수 없기 때문에 우주공간에서 열전달 촉진기술을 개발하기 위한 목적으로 시도된 것이다.

문제해석을 위해 전도열전달에 대한 긴시간척도 변수(\tilde{t})와 가진주기에 대한 짧은 시간척도 변수(t)를 도입하여 2-변수 접근해석을 수행했다.

이론연구를 통해 이전의 수치해석 연구에서 발견한 가진강도가 비교적 작은 경우 가진방향으로 규칙적인 열전달이 촉진되는 현상(가진방향으로의 냉각이 직교방향에 비해 매우 빠르게 일어나는 현상)을 설명할 수 있는 이론모형을 제시했다.

References

- (1) Subbotin, S.V., and Dyakova, V.V., 2018, "Inertial waves and steady flows in a liquid filled librating cylinder," *Microgravity Sci. Technol.* Vol. 30, No. 4, pp. 383~392.
- (2) Park, J. S., 2010, "Investigation of Flow Phenomena in a transonic Fan Rotor Using Laser Anemometry," *ASME Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, Vol. 107, No. 2, pp. 427~435.
- (3) Gershuni, G.Z. and Lyubimov, D.V., 1998, "Thermal Vibrational Convection," Wiley, New York.
- (4) Kozlov, N.V., Vjatkin, A.A., Schipitsyn, V.D. and Stambouli, M., 2019, "Steady flows excited by local oscillations of flexible boundary of a container with fluid," *Microgravity Sci. Technol.* 821~831.
- (5) Amin, N, 1988, "The effect of g-jitter on heat transfer," *Proc. R. Soc. Lond. A* Vol.419, pp.151~172.
- (6) Zeytounian, R. K., 2003, "Joseph Boussinesq and his approximation: a contemporary view," *C. R. Mecanique* Vol. 331, pp. 575~586.
- (7) Carslaw, H. S. and Jaeger, J. C., 1986, "Conduction of Heat in Solids," Oxford Science Publishing.