◎ 논 문 ◎ Original Paper

# 가변 운용 조건을 고려한 축류형 송풍기 최적설계

이형진\* · 최병열\* · 최동훈\* † · 이찬\*\* · 양상호\*\*\*

# Design Optimization of Axial-flow Fan on Various Operation Conditions

Hyeong-Jin Lee\*, Byung-Lyul Choi\*, Dong-Hoon Choi\*, Chan Lee\*\*, Sang-Ho Yang\*\*\*

Key Words : axial-flow fan(축류 송풍기), metamodel(예측모델), design optimization(최적설계), controllable pitch(가변 피치)

## ABSTRACT

In this paper, the Design of Experiment and metamodel-based multi-objective design optimization of the axial-flow fan is investigated. The Design of Experiments proceeded for analyze performances on the various operation conditions of the axial-flow fan. The 5-level full factorial design is selected for operation conditions and the 3-level near orthogonal array for design variables. The metamodels are constructed on proper pitch angles for each flow rate and then evaluated based on predicted R-squared. The RBFs are selected on low flow rates and the kriging is selected on high flow rates. For multi-objective design optimization, the mean values and the standard deviations for performances are selected as the objective functions and constraints. Optimization using NSGA-II is investigated and the Pareto front and compromised optimal solution which improves the objective functions with satisfying constraints are acquired. To confirm the accuracy of the optimal, the validation process and flow characteristics analysis are investigated. The errors of metamodel are under 0.4% for mean values and 4.2% for standard deviations and reasonable flow characteristics are acquired.

## 1. 서 론

송풍기는 회전자에 해당하는 임펠러의 회전 에너지를 이 용하여 유체를 수송하도록 하는 유체기계의 일종이다. 이 중 에서도 높은 비속도를 가져 많은 유량을 토출하는 축류 송풍 기의 경우 주로 터널 등의 환풍구 등 각종 환기장치 등에 이 용되는데, 설계 시 고정된 운용조건에서 운용됨을 전제로 하 기에 상황에 따라 변동되는 환경에서는 효율이 급감하는 문 제가 발생할 수 있다. 이러한 문제를 해결하기 위하여 풍동 실험 등 실제 환경을 모사하여 성능을 평가하는데, 풍동실험 에 대한 비용을 절감하고자 전산유체역학 해석이 도입되었 다<sup>(1)</sup>. 전산유체역학 해석은 풍동실험의 근사 기법으로 비교 적 적은 비용으로 실험값 대비 큰 차이 없는 결과를 획득할 수 있어, 최근 유체기계 성능 평가에 적극적으로 활용되고 있다. 근래에는 이러한 전산유체역학 해석의 정확성이 확보 된 상황에서, 보다 적은 비용으로 빠른 성능 탐색과 설계 최 적화를 진행하기 위하여 예측모델을 구성하는 사례가 확인 되고 있으며<sup>(2,3)</sup>, 이러한 예측모델 기반 최적설계를 진행하여 송풍기의 성능 개선 또한 활발히 진행되고 있다. 이러한 연 구들은 주로 운용조건이 변경되지 않음을 전제하여 설계유 량에서의 성능 예측과 설계 개선을 주안점으로 두고 있다.

유체기계의 기초설계는 기정된 단일 운용 조건에서의 운 용을 전제로 진행되는데, 최근 들어 다양한 운용 조건에서 하나의 터보기계를 운용할 필요성이 증가하고 있다. 이에 따 라 기 설계된 형상에서 운용 조건의 변경을 통하여 성능을 평가하는 탈설계점 평가에 대한 연구가 여러 연구자들에 의 하여 진행된 바 있으며<sup>(4,5)</sup>, 탈설계점에서는 공통적으로 효율 하락과 유동박리에 의한 서지(Surge), 경우에 따라 자유토출

<sup>\* ㈜</sup>피도텍(PIDOTECH Inc.)

<sup>\*\*</sup> 수원대학교 기계공학과(Dept. of Mechanical Eng., Suwon Univ.)

<sup>\*\*\* ㈜</sup>삼원이앤비 기술연구소(Institute of Technology Samwon E&B Co., Ltd.)

<sup>†</sup> 교신저자, E-mail : dhchoi@pidotech.com

The KSFM Journal of Fluid Machinery: Vol. 28, No. 1, February 2025, pp.64~74(Received 24 Sep. 2024; revised 07 Nov. 2024; accepted for publication 09 Dec. 2024)

 64
 한국유체기계학회 논문집: 제28권, 제1호, pp.64~74, 2025(논문접수일자: 2024.09.24, 논문수정일자: 2024.11.07, 심사완료일자: 2024.12.09)





어 있다. 송풍기의 초기형상은 관통류해석 프로그램인 FanDAS<sup>(10)</sup>를 이용하여 획득된 설계유량에서의 형상이다. 본 연구에서는 하나의 회전자를 갖는 축류형 송풍기를 최적 화 대상으로 채택하였다. 작동 유체로 공기가 이용되는 송풍 기의 경우, 입구 안내깃에 의한 예선회의 효과보다 그로 인 한 손실이 크기에 펌프/수력터빈 등과 다르게 입구 안내깃을 사용하지 않고, 임펠러(Impeller)와 디퓨저 베인(Diffuser Vane)으로 구성된다. 또한 목적에 따라 디퓨저 베인을 따로 두지 않는 경우 또한 존재한다. 일반적인 송풍기에서는 벨마 우스(Bell mouth) 형상을 통하여 유동을 압축시키는 동시에 가속시킨다. 임펠러는 회전을 통하여 일을 발생시키고, 디퓨 저 베인은 임펠러로 인하여 선회한 유동을 본래의 방향으로 재정렬하는 기능을 갖는다. 본 연구에서는 임펠러 고유의 성 능 확인을 위하여, 벨마우스 형상과 디퓨저 베인을 설치하지 않고 임펠러만 설치된 형태의 송풍기의 해석을 진행하였다. Table 1에는 설계유량에서의 송풍기 운용 조건이 제시되

어 있다. 비속도는 약 237로 축류형 송풍기로 설계함이 적절 함을 확인하였다. 또한 송풍기의 운용 조건과 이에 대응될 것으로 파악되는 적정 피치각이 Table 2에 제시되어 있다. 기준 유량에서 0피치 상태를 BEP로 가정하고, 유량에 대하 여 선형적인 피치 제어를 적용하고자, Table 2와 같이 피치 각을 선정하여 해석 과정에 적용하였다. 각 스팬에서 블레이 드의 익형은 동일하게 유지하고, 적층 시 중심축에 대한 각 도를 변경하는 방식으로 설치각을 반영하였으며, 패러미터 로 지정되지 않은 스팬들의 설치각은 2차식으로 근사하였다. 또한 피치각 변경은 이러한 설치각 변경을 모든 스팬에 대하 여 동일하게 적용하여 주는 방식으로 구현되었다.



Fig. 1 Process of multi-stage design optimization

(Free delivery) 등 바람직하지 않은 유동현상이 관측된다. 이에 탈설계점에서 운용하면서 효율의 손실을 최소화하는 방법의 일환으로 가변유량 터보기계에 대한 필요성이 증대 되고 있다. 이러한 운용 조건의 변경에 대응하는 방법으로는 유량에 따라 유체기계의 회전수를 조절하거나<sup>(6)</sup> 블레이드의 각도를 변경<sup>(7)</sup>하는 등의 방법이 있는데, 이 중 전자는 압력 상승 폭이 유량에 대해 종속적이라는 단점을 지녀 후자와 같 이 블레이드 각도 변경을 통한 가변 기법이 대두되고 있다. Jeon 등<sup>(8)</sup>은 피치각 변화에 대한 축류 팬의 성능 및 소음을 평가하였고, Ko 등<sup>(9)</sup>은 피치와 캠버 등의 변경을 통하여 다 리우스 터빈의 성능을 평가한 바 있다.

본 연구에서는 가변 운용 조건을 반영하기 위하여 임펠러 의 피치각을 변경하였는데, 설계유량의 80%-120% 범위 내 에서 임펠러의 피치각을 -5°~+5°까지 조정하여 특정 설 계 범위 내에서의 피치각별, 유량별 송풍기의 성능을 평가하 였다. 이러한 결과를 이용하여 각 형상별 성능곡선을 획득하 고, 각 유량별 최적 효율점(BEP)에서의 성능을 최적화하고 자 한다. Fig. 1에는 본 연구에서 사용된 가변 피치 송풍기의 성능 획득 알고리즘이 제시되어 있다. 격자 생성부터 해석 결과 추출까지의 과정을 자동화시키고, 이를 이용하여 사전 지정된 실험점들에 대한 데이터를 확보하고 예측모델을 생 성하였다. 이를 이용하여 파레토 최적화 진행 후 자동 생성 된 결과 분석 보고서를 이용하여 가변 피치 송풍기의 성능 개선안을 제시하였다.

# 2. 송풍기 형상과 해석조건

Fig. 2에는 설계 개선 대상 송풍기의 초기 형상이 도시되

#### Table 1 Design specification of axial Fan

	Qd(CMM)	Pt(Pa)	n(RPM)	Pwr(kW)	Ns
Design point	5400	2000	1200	200	237

Table 2 Flow conditions and pitch angles

Table 3 Grid convergence index for the grid dependency test

	case1	case2	case3	case4	case5
$Q\!/Q_d$	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2
Pitch (deg.)	-5	-2.5	0	2.5	5

# 3. 수치해석 조건

본 연구의 수치해석을 위하여, 터보기계 해석 등에 강점을 가진 Ansys CFX<sup>(11)</sup>를 사용하였다. 정상상태 해석을 진행하였 고, 서지 영역에서도 해석이 정상적으로 수렴함을 확인하였 다. 수치해석의 지배방정식으로는 레이놀즈-평균 Navier-Stokes 방정식 (RANS)을 이용하였고 레이놀즈 응력의 이방 성은 존재하지 않는다 가정하였다. 회전체의 벽면 주변 유동 의 모사를 위하여 2 방정식 난류모델을 채택하였고, 이 중 점 성저층(viscous sublayer)에서는  $k-\omega$  난류모델을, 대수영역 (logarithmic layer)에서는  $k-\omega$  난류모델을 적용하는  $k-\omega$ SST 난류모델<sup>(12)</sup>을 적용하였다. 또한 저 레이놀즈 영역의 바 른 모사를 위하여 기준 형상에서의 벽면 주위의 최대  $y^+$ 를 2 이하로 설정하였다.

Fig. 3에는 수치해석에 이용한 격자의 형상이 제시되어 있다. 모든 격자는 정렬격자로 구성하였으며, 이러한 정렬격 자의 구성에는 Ansys 사의 TurboGrid를 이용하였다. 초기 형상에서의 격자는 총 576,206개의 셀(cell)을 갖고, 임펠러 부분에는 회전에 의한 주 유동이 발생하므로 463.016개의 셀을 분포시켰다. 터보기계는 축에 대하여 동일한 형상의 블 레이드가 반복적으로 설치되어 있어, 해석 자원 절약을 위하 여 주로 반복 조건을 사용한다. 본 연구에서도 이에 따라 12 개 블레이드 중 1개만을 이용하여 격자를 구성하고. 회전 방 향으로 주기조건을 설정하여 반복되는 형상을 모사하였다. 또한 정상 상태에서의 회전유동 모사를 위하여 다중 기준 좌 표계를 이용하였고, 회전자와 고정자 사이 인터페이스는 고 정자에 구조물이 존재하지 않으므로 회전자에 맞추어 프로 즌 로터(Frozen rotor)을 이용하였다. 반복 조건 경계면의 경우 회전 주기조건(Rotational periodic condition)을 적용 하였다. 슈라우드 팁을 제외한 인터페이스에는 정렬 격자의



Fig. 3 Grid system of rotor region

$Q/Q_d$	0.8		1.0		1.2		
Performances	$\eta_t$	$P_t$	$\eta_t$	$P_t$	$\eta_t$	$P_t$	
N <sub>1</sub>	529	,048	576	,206	672	2,258	
N <sub>2</sub>	264	,048	304	304,367		351,775	
N <sub>3</sub>	135	,716	162	2,483	185	,304	
r <sub>21</sub>	1.	.26	1.	.23	1.	.24	
r <sub>32</sub>	1.	.25	1.	.23	1.	.24	
φ1	88.28	1995.4	91.12	2027.1	92.30	2243.5	
φ <sub>2</sub>	89.37	2035.4	90.92	2037.8	92.20	2248.6	
φ <sub>3</sub>	89.85	2035	90.54	2060.7	91.71	2234.2	
8 <sub>21</sub>	0.48	-0.4	0.194	-10.7	0.106	-5.1	
E <sub>32</sub>	1.092	-40	0.383	-22.9	0.486	14.4	
Apparent order, p	3.827	20.749	3.187	3.572	7.147	4.543	
φ <sup>ext</sup> <sub>21</sub>	90.18	2035.0	91.32	2017.4	92.33	2240.7	
e <sup>a</sup> <sub>21</sub>	5.3e-3	2.0e-4	2.1e-3	5.3e-3	1.1e-3	2.2e-3	
e <sup>ext</sup> <sub>21</sub>	3.7e-3	1.6e-6	2.3e-3	4.8e-3	3.1e-4	1.2e-3	
GCI <sup>fine</sup> 21	4.7e-3	2.0e-6	2.8e-3	6.0e-3	3.9e-4	1.5e-3	

특성에 의거, 1:1 인터페이스를 적용하여 격자면 간 데이터 전송에 왜곡을 최소화하도록 처리하였다. 또한, 슈라우드 팁 에 의한 누설손실(leakage loss)을 고려하고자 팁 간극을 5mm으로 설정하였으며, 팁 간극에는 상호간 내삽된 유동장 을 전달하는 GGI(General Grid Interface)를 적용하여 적절 한 격자 품질을 갖도록 하였다.

획득된 해석 결과들의 신뢰성과, 이에 대한 격자의 영향성 을 확인하기 위하여 격자 수렴성 지표(Grid Convergence Index)<sup>(13)</sup>에 대한 평가를 진행하였고, 설계유량과 최대/최소 유량에서 대표 형상의 전압력(Total pressure) 상승과 효율 에 대한 결과가 Table 3에 제시되어 있다. GCI 결과값은 격 자를 매우 조밀하게 구성하여 격자독립성이 충분히 보장되 었을 경우에서의 성능지수 외삽값( $\phi^{ext}_{21}$ ) 및 GCI 수식으로 계산된 성능지수 외삽값의 기대오차( $e^{ext}_{21}$ ), 그리고 가장 조 밀한 격자에서의 해당 성능지수에 대한 수치적 불안정성 (GCI<sup>fine</sup><sub>21</sub>)을 의미한다. 설계유량에서의 격자수렴성 수치가  $6 \times 10^{-3}$ 수준, 최소 유량에서는  $5 \times 10^{-3}$ 수준, 최대 유량에서 는  $1.5 \times 10^{-3}$ 수준으로 격자 독립성이 충분히 확보되었음을 확인하였다.

## 4. 실험계획법

#### 4.1 설계변수 및 목적함수 정의

설계 조건에서 벗어난 터보기계를 운용 시 효율이 대폭 저 하되며 운용 조건에 따라 자유토출 영역에 들어 전압력이 감 소하거나, 서지 영역에 들어 실속이 발생하여 터보기계가 파



Fig. 4 Design variables of axial fan

손되는 등의 문제점이 발생한다. 이를 방지하기 위하여 유압 /전기 모터 등을 이용하여 입구 안내깃, 임펠러 등의 각도를 변경하여 탈설계점에서도 설계점과 유사한 수준에서의 성능 을 확보하고자 하는 과정을 가변 피치 제어라 칭한다. 가변 피치 제어는 크게 입구 고정자인 안내깃을 제어하는 기법과 회전자인 임펠러를 제어하는 기법으로 분류되는데, 본 연구 에서는 임펠러의 피치각을 제어하는 기법을 채택하였다.

Fig. 4에는 축류 송풍기의 설계변수가 제시되어 있다. 설 치각(setting angle), 캠버각(camber angle), 그리고 허브 및 슈라우드 반경 등의 변경이 가능한데 본 연구에서는 블레 이드의 단면 형상을 유지하면서 설치각만을 변경하였다. 이 에 허브, 미드스팬 그리고 슈라우드 팁 부근에서의 설치각의 총 3개의 형상 설계변수와 운용 조건과 그에 따른 피치각 등 총 2개의 운용 설계변수로 총 5개 설계변수가 선택되었다.

축류 송풍기의 성능지수는 축동력(Power, Pwr), 전압력 상승(Total pressure,  $P_t$ ), 그리고 전효율(Total efficiency,  $\eta_t$ ) 로 표현된다. 이들은 각각 식 (2)-(4)와 같이 표현된다.

$$Pwr = T \times \omega \tag{2}$$

 $P_t = P_{02} - P_{01} \tag{3}$ 

$$\eta_t = \frac{P_t Q}{P w r} \tag{4}$$

이러한 설계변수들의 범위가 Table 4에 제시되어 있으며, 본 연구에서는 위와 같은 성능지수들 중 전압력 상승과 효율 에 대하여 실험계획법을 통하여 성능 곡선을 획득하고 이를 기반으로 예측모델 생성과 최적설계를 진행하였다.

Table 4 Range of design variables and performaneces

	Range					
		Minimum	Maximum	Nominal		
	SetBH	39.26	43.26	41.26		
	SetBM	25.68	29.68	27.68		
Designe variables	SetBS	21.16	25.16	23.16		
	$Q/Q_d$	0.8	1.2	1		
	Pitch	-5	5	0		
Doutourou ooo	$\eta_t$	Maximize				
Performances	$P_t$	20	$000 \le P_t \le 240$	00		

#### 4.2 실험계획법과 예측모델

실험계획법은 적절한 횟수의 실험을 통하여 각 인자와 성 능의 관계를 파악하고자 고안된 데이터 샘플링 기법이다. 본 연구에서는 형상 설계변수의 실험계획법에는 예측모델 탐색 과 함께 패러미터 간 관계성 파악을 위하여 3수준 요인배치 법을 채택하였고, 다항회귀모델 가정 시 완전 2차 다항식 (Full quadratic model)을 구성할 수 있는 최소 한계인 10개 의 실험점을 획득하였으며, 실험점 획득에는 근사직교배열 법(near Orthogonal Array, nearOA)를 이용하였다. 근사 직교배열법은 직교배열법의 파생으로, 직교성을 완전히 만 족하지는 못하지만 실험점의 수를 자유롭게 선정할 수 있다. 선정된 10개의 실험점은 약 58,55%의 직교성을 갖는다. 운 용조건에 대해서는 형상 설계변수에 비하여 높은 성능지수 비선형성을 가지므로. 이러한 비선형성을 예측모델에 반영 하고자 지정된 수준 내에서 모든 지점을 실험점으로 선택하 는 5수준 완전요인배치법(Full Factorial Design, FFD)을 선정하였다.

Fig. 5에는 자동화된 데이터 획득 과정이 도시되어 있다. 형상 변경 프로세스를 통하여 설치각을 변경하고, 변경된 형 상에서 지정된 유량과 피치각에서 성능지수인 효율과 전압 력을 획득하였다. 이 중 각 유량별 BEP에 해당하는 효율과 양정의 평균과 표준편차를 획득하여 목적함수로 사용하였다. 또한 BEP에 해당하지 않는 지점들에서의 성능지수로 경향성 을 파악하고, 서지와 자유토출의 관찰을 위하여 성능곡선을 도시하였다. 각 실험점에서의 유동해석은 약 2시간 소요되었 으며, 형상 실험점 10개에 대해 유동조건 25개를 적용하여 총 250 케이스의 해석을 진행, 약 4주의 시간이 소요되었다. 또한 본 연구에서는 격자 등의 일관성을 유지하고자 수치해 석과 실험계획법 테이블 하에서의 데이터 획득 과정을 자동 화하였으며, 이 과정에 PIDOTECH의 상용 프로그램인 PIANO S/W<sup>(14)</sup>를 이용하였다.

본 연구에서와 같이 하나의 성능지수 획득에 있어 여러 번 의 해석을 반복 수행하여야 하는 등 1회 해석에 많은 리소스 가 필요한 경우, 다소간의 오차를 감안하더라도 근사적인 경



Fig. 5 Automation process of turbomachinery

향성을 파악하고 이를 이용하여 대략적인 성능을 예측하는 것 또한 유효한 방법이 될 수 있다. 이를 위하여 확보된 결과 를 이용하여 근사적인 경향성을 도출하는 일련의 과정을 예 측모델 구성이라 하며, 이러한 과정하에 도출된 근사적인 경 향성을 예측모델(Metamodel)이라 칭한다. 획득된 예측모델 을 이용하여, 해석을 진행하지 않은 영역에서의 경향성을 예 측할 수 있으며, 본 연구에서는 이러한 예측모델을 이용, 성 능 예측과 설계 개선을 진행하였다.

예측모델을 구성하기 위한 데이터 획득 방법으로는 크게 기 확보된 데이터만을 사용하는 방법과 예측모델 구성을 위하여 새로이 데이터를 획득하는 방법으로 분류된다. 전자는 보유한 데이터에 쏠림이 있거나 데이터의 절대적인 수가 부족할 수 있지만, 예측모델 구성을 위한 별도의 리소스를 투입할 필요 가 없어 추가적인 데이터 확보가 곤란할 때 채택 가능하다. 후 자의 경우 데이터 쏠림 등에 대비하여 실험점을 고르게 분포 시킬 수 있으며 상대적으로 적은 수의 데이터로도 정확한 예 측모델을 구성할 수 있으나, 예측모델 구성에 추가적인 리소 스를 요구하여 새로운 설계를 도입하거나 비교적 정확한 예측 모델이 필요할 때 채택할 수 있다. 본 연구에서는 전자의 방법 을 채택하였는데 이는 개별 실험점에서 소요되는 리소스가 매 우 큼에 기인하였다. 이에 데이터 수 부족 등으로 발생하는 예 측모델 오차를 감소시키고자 동일한 데이터 셋으로 크리깅 (Kriging, KRG), 방사기저함수 보간법(Radial basis functioninterpolation, RBFi)과 같은 보간 예측모델 2개와 다항회귀 (Polynomial regression, PR), 방사기저함수 회귀법(Radial basis function-regression, RBFr), 다층 퍼셉트론(Multi-layer perceptron. MLP). 그리고 앙상블 결정 트리(Ensemble decision tree, EDT)의 총 6가지 종류의 서로 다른 예측모델 을 구성하였다. 크리깅은 전역 모델과 잔차의 합으로 실험점 을 정확히 지나는 모델을 구성하며, 방사기저함수 보간법은 예측하고자 하는 지점 중심으로 훈련된 데이터들에 가중치를 적용하여 성능값을 결정하는데 실험점을 정확히 지나면 방사 기저함수 보간법, 그렇지 않으면 방사기저함수 회귀법으로 칭 한다. 다항회귀법은 데이터 형태를 다항식으로 가정하고 최소 자승법을 활용하여 다항식 계수를 추정하는 전통적인 기법이 다. 다층 퍼셉트론 기법은 여러 개의 은닉층을 갖는 인공 신경 망의 일종으로 여러 개의 뉴런에서 입력을 받아 가중치와 활 성화 함수를 적용 후 예측 결과를 출력한다. 마지막으로 앙상 블 결정 트리의 경우 랜덤 포레스트를 이용하여 여러 의사결 정 트리를 학습, 트리들의 결과를 결합하여 예측을 수행하는 모델로, 이들을 동시에 이용하여 가장 적합한 예측모델을 선 정하고자 하였다. 모든 실험점을 학습점(Training point)으로 채택하였고, 이에 따라 오차 비교 검증에는 정확도는 다소 떨 어지지만 시험점(Test point)가 필요하지 않은 Predicted R-squared을 사용하였다. Predicted R-squared은 예측모 델에 추가적인 훈련점이 필요한 지를 판단하여 주는 기준으 로, 식 (5)와 같이 표현된다.

Predicted 
$$R^2 = 1 - \sum_{j=1}^{n_{j=1}} (y_j - \hat{y_{-j}})^2 / \sum_{j=1}^{n_{j=1}} (y_j - \bar{y})^2$$
 (5)

본 연구에서는 각 유량에 대응되는 피치각에서의 성능을 평가하고자 하므로, 피치각 별 대응되는 적정 유량에서의 효 율과 전압력 상승 폭을 예측모델의 구성 대상으로 선정하였 다. Predicted R-squared는 R-squared의 변형으로, 모든 학습점을 반영한 예측모델을 이용한 예측값과 학습점들에 대 하여 그 자신을 제외하고 예측모델 구성 후 해당 지점에서의 예측값을 비교, 이 오차의 제곱을 분산에 대하여 정규화해 준 값을 1에서 빼 준 값으로 정의된다. 이 값이 1에 가까울수록 분산에 비하여 예측모델 오차가 작아짐을 의미하며, 이는 예 측모델 생성에 추가 실험점을 필요로 하지 않음을 의미한다.

Table 5에는 생성된 예측모델들의 Predicted R-squared가 제시되어 있다. 예측하고자 하는 경향성이 비선형성이 작은 경 우는 간단한 다항회귀 모델이, 비선형성이 큰 경우는 RBF 등 복잡한 모델이 선정된다<sup>(16)</sup>. 전 유량과 전 성능지수에서 공통 적으로 보간법 기반 모델들이 높은 Predicted R-squared를 보였으며, RBFr이 선정된 영피치 조건의 전압력 상승 폭의 경 우도 보간법 기반 모델들의 Predicted R-squared 또한 1에 가 까운 매우 높은 값을 가짐이 확인되나, 고유량 조건 효율값에

Table 5 Predicted R-square of metamodels

		Metamodels					
Obj.	$Q/Q_d$	KRG	RBFi	RBFr	PR	EDT	MLP
Eff	0.8	0.946	0.972	0.943	0.093	0.381	0.000
	0.9	0.977	0.961	0.950	0.039	0.577	0.000
	1.0	0.963	0.901	0.889	0.014	0.680	0.000
	1.1	0.988	0.944	0.956	0.030	0.737	0.000
	1.2	0.725	0.053	0.259	0.520	0.371	0.000
Pt	0.8	1.000	1.000	1.000	1.000	0.643	0.942
	0.9	1.000	1.000	1.000	1.000	0.682	0.988
	1.0	0.996	0.995	0.996	0.958	0.715	0.939
	1.1	0.998	0.995	0.997	0.981	0.718	0.974
	1.2	0.995	0.943	0.966	0.894	0.644	0.936

서는 낮은 Predicted R-squared 값이 계산된다. *Eff*<sub>0.8</sub>, *P*<sub>0.8</sub>, *P*<sub>0.9</sub>와 같이 저유량 조건에서는 RBFi가, *P*<sub>1.0</sub>에서는 RBFr이 선정되고 *Eff*<sub>0.9</sub>, *Eff*<sub>1.0</sub>, *Eff*<sub>1.1</sub>, *Eff*<sub>1.2</sub>, *P*<sub>1.1</sub>, *P*<sub>1.2</sub>와 같은 고유량 조건에서는 Kriging이 선정됨을 보아 공통적으로 보간법 기 반 예측모델이 더 유효하며 저유량 조건에서는 RBF 계열 모 델이, 고유량 조건에서는 Kriging이 예측모델 구성에 더 적합 함이 확인된다.

#### 5. 다중목적함수 최적설계

다중목적함수 최적설계는 크게 가중치 설정을 통하여 하 나의 목적함수로 치환 후 해당 목적함수에 대한 최적 형상을 찾는 가중치 기반 최적설계와 설계변수 범위 전역에 실험점 을 분포시켜 유전알고리즘을 통하여 최적해의 파레토 집합 을 찾는 파레토 최적설계로 분류된다. 본 연구에서는 파레토 최적설계 기법을 이용하였고, 광범위한 유량 조건 내 (0.8 ≤ Q/Q<sub>d</sub> ≤ 1.2)에서 정해진 전압력 상승 범위 내에서 효 율 개선을 목표로 하되, 일정한 운전 성능을 보장하기 위하 여 유량별 성능지수들에 평균, 표준편차를 획득하여 목적함 수/구속조건으로 구성하였다. 이에 기반하여, 가변피치 조건 에서의 다중목적함수 최적설계가 다음과 같이 정식화되었다.

```
Find: SetBH, SetBM, SetBS
to maximize: \overline{Eff}
to minimize: \sigma_{Eff,}\sigma_{Pt}
subject to: 2000 \le \overline{Pt} \le 2400
```

가변피치 조건에서 지정된 구속조건인  $\overline{Pt}$  범위 내에서, 성능 개선을 위하여 효율의 평균값인  $\overline{Eff}$ 를 최대화하고 가 변 조건에서의 안정적인 성능 획득을 위하여 효율과 압력의 표준편차 $\sigma_{Eff},\sigma_{Pt}$ 를 최소화하는 방향으로 설계문제를 정식화 하였다. 이 중 최적해 선정에 있어  $\overline{Eff}$ 을 우선순위 목적함수 로 선정하였고,  $\sigma_{Eff}$ 을 그 다음 순위 목적함수로 선정하였다.

다중목적함수 최적설계의 수행을 위해 AIDesigner sim S/W<sup>(15)</sup>를 사용하였고, 최적설계 기법으로는 유전알고리즘 기반 파레토 최적설계 기법인 NSGA-II (Non-dominated Sorting Genetic Algorithm-II)<sup>(17)</sup>를 이용하였다. NSGA-II 기법은 유전 알고리즘의 돌연변이를 통하여 설계영역을 탐 색하고, 엘리티시즘으로 높은 성능을 보이는 지점들을 선택 하는 최적화 기법의 일종으로, 파레토 최적설계 기법들 중 가장 자주 사용되는 기법에 해당한다. 본 연구에서는 해당 기법을 이용하여 주어진 전압력 상승 범위 내에서 균일하며 높은 효율을 갖는 형상을 찾고자 파레토 최적설계를 진행하 였고, 도출된 성능 개선 결과에 대한 분석을 진행하였다.

## 6. 결과 및 분석

## 6.1 실험계획법 결과분석

Fig. 6에는 각 형상들의 효율과 전압력 상승폭에 대한 성 능곡선이 제시되어 있다. 영피치 조건에서의 전압력 상승을 확인 시, #4, #6, 그리고 #10이 구속조건(Fig. 6의 푸른 띠 영역 내)을 만족함을 확인할 수 있다. 또한 #3과 #7의 경우 구속조건에 비하여 높은 전압력 상승을 보이나, 실 운용조건 에서 디퓨저 베인에 의한 압력 손실을 고려하여 주어야 하므 로 적절한 형상이라 판단된다. 서지 영역은 저유량-고피치 조건에서 발생하는데. 설계변수 SetBM이 큰 값을 가질 경우 (#3, #4, #7, #10) 설계유량에 비하여 큰 차이를 보이지 않는 조건에서(약 0.9Qd) 서지 영역이 확인된다. 반면 SetBM이 작을 경우(#1, #5, #8)에는 서지 발생은 늦춰지는 대신(약 0.8Qd) 자유토출영역을 지나 전압력이 감소하는 구간이 넓 어짐이 확인 가능하다. 효율 또한 크게 차이를 보이지는 않 으나, SetBM이 큰 조건에서 더 큰 값을 갖는 경향이 확인된 다. 이러한 성능곡선들을 이용하여 설계변수 간 상관관계를 분석한 상관관계도가 Fig. 7에 제시되어 있다. 전압력 상승 의 경우, 서지가 발생할 것으로 예측되는 고피치-저유량 영 역을 제외하고는 모두 SetBM에 대하여 1에 가까운 강한 양 의 상관관계를 보임으로써, SetBM이 전압력 상승에 가장 큰 영향을 미치는 것으로 확인된다. 반면 SetBH의 경우 서지 영역을 제외하면 전압력 상승과 상관관계가 없는 것으로 파 악된다. SetBS의 경우 약 0.3 정도의 상관관계를 보여, 약한 상관관계를 가지는 것으로 확인된다. 효율 또한 SetBM과 가 장 큰 상관관계를 보이는데, 유량에 따른 효율 증감이 BEP 전후에서 변경됨을 반영하여 상관관계의 방향 또한 반전됨 을 확인 가능하다. 반면 SetBH, SetBS의 경우 유량과 피치 에 대하여 경향성이 뚜렷하지 않은 약한 상관관계를 보인다. 이는 설계변수 SetBM이 두 성능지수들의 개선에 대하여 가 장 큰 영향을 끼침을 의미하며, 성능지수 개선 방향이 상호



Fig. 6 Performance curve of by shape (x axis: Q/Qd)



Fig. 7 Correlation of design varialbes and performances

반대 방향임을 고려 시 해당 설계변수의 타협점에서 최적해 가 도출될 것으로 예측 가능하다.

#### 6.2 최적설계 결과분석

## 6.2.1 설계개선 분석

Table 6에는 기준 모델과 최적설계 모델의 후보군의 설계 변수와 성능지수가 제시되어 있다. 가변 피치, 가변 유량 운 용조건에서의 안정적인 성능 획득을 위하여 파레토 최적 내 에서 모든 목적함수를 개선하는 설계 지점을 최적설계 형상 후보군으로 선정하였으며, 각 후보군 내에서 목적함수는 기 존 대비 약 0%(*Eff*)~19%(σ<sub>Eff</sub>) 개선되었다. 또한 설계변수 중 SetBS의 경우 모든 후보군에서 상한값에 도달하였다. 이 러한 최적설계 후보군 중 모든 목적함수를 개선하면서 그 중 에서 *Eff*을 가장 크게 개선하는 후보를 선정하였고, 해당 설 계변수에서 각 목적함수는 우선순위 순으로 0.39%, 12.38%, 그리고 3.45% 개선됨이 확인된다. 여기서 Opt4의 경우 효율 을 가장 크게 개선하나 각 성능지수들의 표준편차가 높아 운 용이 안정적이지 못하며, 고유량 고피치 영역에서 전압력이 2400Pa를 상회할 것으로 판단되어 선정하지 않았다. 이와 같이 선정된 형상과 기존 형상의 비교 결과가 Fig. 8에 제시 되어 있는데, 허브와 미드스팬에서는 설계변수 차이가 크지 않아 형상에 큰 차이를 보이지 않으나, 상한값에 도달한 슈 라우드 근방에서는 임펠러 형상의 변화가 확인 가능하다.

	Nomo	Nama		Pareto set					
	Iname	Init.	Opt1	Opt2	Opt3	Opt4	Opt5		
	SetBH	41.26	40.51	41.02	41.28	43.25	39.65		
DV	SetBM	27.68	28.07	27.21	27.17	28.49	26.58		
	SetBS	23.16	25.16	25.16	25.15	25.16	25.16		
	$\overline{Eff}$	91.14	91.49	91.14	91.14	91.82	90.71		
Obj	$\sigma_{E\!f\!f}$	0.86	0.76	0.70	0.70	0.86	0.66		
	$\sigma_R$	83.43	80.55	72.04	72.01	95.49	65.92		
Con	$\overline{Pt}$	2,096	2,271	2,134	2,134	2,391	1,997		



Fig. 8 Shape comparison of Initial vs Optimal on zero-pitch(left: sideview, right: meridional view)

Fig. 9에는 초기 형상과 선정된 최적 형상의 유량 별 성능 지수들과 이들의 분포가 도시되어 있다. 각 유량의 성능지수 들은 해당 유량에 맞는 피치각(Table 2 참고)이 적용된 결과 이다. Fig.9의 좌단에서, *Eff*와 *R*의 상승에 의하여 모든 유 량에서의 효율과 압력 상승 모두 초기 형상보다 증가함을 확 인 가능하다. 또한 유량 상승에 따른 효율 증가 경향성 또한 상호 일치함이 확인된다. 압력 상승의 경우 고유량 고피치 영역에서 평균 구속조건에 해당하는 2400Pa에서 약간 벗어 남이 확인되나, 디퓨저 베인 설치 시 감소하는 압력을 감안 시 성능에 큰 영향을 미치지 않을 것으로 예상된다. Fig. 9 의 우단에는 성능지수에 대한 Box plot이 제시되어 있는데, 이를 통하여 최적해에서 σ<sub>Eff</sub>의 개선되었음이 확인 가능하 다. 그러나 σ<sub>R</sub>는 개선 정도가 크지 않아 개선의 정도가 σ<sub>Eff</sub> 에 비해서 두드러지지 않는다.

Fig. 10에는 1순위 목적함수에 해당하는  $\overline{Eff}$ 에 대한 다른 두 목적함수들의 파레토 프론트 그래프가 제시되어 있다. 두 표준편차 모두  $\overline{Eff}$ 에 대하여 양의 상관관계를 가지며, 설계 변수 개선 방향의 차이에 의하여 이들과  $\overline{Eff}$  사이에 상충성 을 갖게 됨을 확인 가능하다. 또한  $\overline{Eff}$ 가 1.48% 증가할 동안  $\sigma_{Eff}$ 가 69.56% 증가하여 동 조건에서 52.76% 증가한  $\sigma_{P}$ 에 비하여 더 강한 상충성을 보인다. 최적해는 성능지수  $\overline{Eff}$ 와  $\sigma_{Eff}$ 의 파레토 프론트 위에 위치하고 있으며  $\sigma_{P}$  또한 개선하 는 것이 확인된다. 두 파레토 프론트 그래프에서 확인 가능 한 바와 같이, 파레토 최적 내에서 효율을 개선 시 운전 조건 에 대한 안정성이 감소하는 것을 확인할 수 있으며, 두 파레 토 프론트가 서로 겹치지 않음에서 성능의 안정성 또한 상호 간에 약간의 상충성을 보임을 알 수 있다.



Fig. 9 Performances of initial and optimal (left: performances by flow rates, right: box plot of performances)



Fig. 10 Pareto front of objective functions

#### 6.2.2 최적설계 결과 검증

최적설계 결과의 검증을 위하여, 초기 형상과 최적 형상 등의 위치에서 예측모델을 이용한 예측 결과와 실제 해석 결 과를 비교 검증하는 과정이 필요하다. 본 연구에서는 이를 위하여 초기 형상과 최적 형상에서의 성능지수 및 유량별 압 력과 효율에 대한 확인해석을 통하여 예측모델의 검증을 진 행하였다.

Fig. 11에는 유량별 압력과 효율에 대한 predicted-real 선도가, Table 7에는 성능지수에 대한 확인해석 결과가 제시 되어 있다. Predicted-real 선도는 특정 성능지수에 대한 예 측값 대비 실제값의 차이를 확인 가능한 선도로, 그래프 중 앙의 직선에서 멀어질수록 예측값과 실제값의 차이가 큼을 의미한다. Fig. 10a, 10b의 경우 모두 예측값 대비 실제값이 큰 차이를 보이지 않으며, 전압력 상승의 경우 약 0.84%, 전 효율의 경우 약 0.2%의 상대오차를 보여 예측모델 생성이 잘 이루어졌음이 확인 가능하다. 또한 Table 7과 같이 이들 의 평균과 표준편차에 대한 오차 또한 4.2% 이내로 성능지 수 또한 잘 예측함이 확인된다. 표준편차의 경우 다른 예측 모델들 사이에서 발생한 오차가 누적되어 평균값의 경우보 다 다소 높은 수준의 오차를 확인할 수 있으나, 전반적인 경 향성의 예측에 문제 되지 않는 수준으로 평가되었다.



Fig. 11 Predicted-real value of initial and optimal conditions

0	bjs.	Predicted	Real	Error (%)
	Eff	91.11	91.13	0.03
::4	$\sigma_{E\!f\!f}$	0.86	0.86	0.22
Init.	$\overline{Pt}$	2088.60	2096.15	0.36
	$\sigma_{R}$	82.66	83.43	0.94
	$\overline{Eff}$	91.38	91.49	0.11
4	$\sigma_{E\!f\!f}$	0.79	0.76	4.15
орі.	$\overline{Pt}$	2266.40	2271.23	0.21
	σъ	79.15	80.53	1.75

#### 6.2.3 유동장 분석

최적설계 결과의 타당성을 검증하기 위한 과정은 크게 예측 모델 검증과 해석 결과 검증의 두 종류로 분류되는데, 이 중 전자는 이전 장에서 진행하였고 잘 생성되었음을 확인하였다. 여기에 해석의 검증과 동시에 설계 개선 원인의 파악을 위하 여, 설계 유량 조건에서의 유동 특성을 비교 분석하였다.

Fig. 12에는 설계유량에서 초기 형상과 최적 형상의 스팬별 유동의 선회각(Turning angle<sup>(18)</sup>)과, 특정 스팬에서의 압력 분포를 도시하였다. 선회각은 실제 유동의 입사각과 출구각의 차이를 의미한다. Fig.12a에서, 슈라우드 주변에서의 선회각 은 초기 형상에 비하여 증가하고(@). 반면 허브 주변에서는 다소 감소함(ⓒ)이 확인된다. 이에 설계유량의 임펠러에서는 초기 설계에 비하여 개선된 설계에서 유동에 더 많은 선회를 발생시켜 압력 상승 폭을 증가시킦을 예측 가능하다. 이에 대 한 검증을 위하여, Fig. 12b에 각각의 위치를 대표하는 스팬에 서의 압력 분포도를 도시하였다. Fig. 12b의 상단은 스팬이 0.9인 @위치에서의 압력 분포인데, 해당 영역에서는 압력면 에서는 정체점 대비 압력하강 폭이 적고, 흡입면에서는 반대 로 정체점 대비 압력하강 폭이 큼을 확인할 수 있다. Fig. 12b 중단, 하단은 각각 스팬이 0.5인 协위치, 0.1인 ⓒ위치에서의 압력분포인데, ⓑ에서는 ⓐ에서와 유사한 현상이 약하게 확인 되며, ⓒ에서는 선회각 차이와 유사하게 초기 형상에 대해서 에 큰 차이를 보이지 않는다. 이에 의하여, 초기 형상 대비 최 적 형상에서의 압력 상승은 설치각 변경에 의하여 미드스팬과 슈라우드 사이에서 선회각이 증가, 이에 의하여 압력 상승폭 이 증가함에 기인함을 확인할 수 있다.

Fig. 13에는 초기 형상과 최적 형상에서의 유량 별 임펠러 의 벽면압력 분포와 끝단 와류(Wingtip vortex)의 형상이 제 시되어 있다. 총 세 가지 유량에서의 결과를 동시에 제시하 여 최적 형상에서의 해석이 잘 수행되었음을 확인하였다. Fig. 13a의 우단에 제시된 바와 같이 초기 형상과 최적 형상 모두 고유량 고피치 조건에서 다른 두 조건에 비하여 다소 낮은 흡입면 압력이 확인된다. 이로 인하여 다른 구간에서보 다 높은 압력상승을 획득 가능하며, 이는 Fig.9b에서 나타난 압력상승 경향을 통하여 확인할 수 있다.



(a) Turning angle on impeller

(b) Pressure distribution (top: Span=0.9, mid: Span=0.5, bottom: Span=0.1)

Fig. 12 Flow characteristics on design flow rate





Fig.13a에는 벽면압력 분포와 함께, 벽면압력의 최소값의 위치를 표시하였다. 압력면에서는 전 유량에서 초기 형상과 최적형상의 압력차가 크게 발생하지는 않으나. 임펠러 후미 부근에서는 초기형상에서보다 최적형상에서의 압력의 회복 정도가 소폭 개선됨을 확인할 수 있다. 이러한 경향성은 Fig.12b의 압력분포와 일치한다. 또한 압력면의 선단 주변에 서의 국소적인 압력 강하 폭이 초기 형상보다 최적 형상에서 감소하는 모습을 보이며 이러한 경향성은 슈라우드 부근에 서 더욱 두드러진다. 이에 따라 압력면에서의 벽면압력 분포 가 초기 형상보다 최적 형상에서 더욱 개선됨을 확인할 수 있다. 또한 흡입면의 경우 이러한 압력 분포의 차이가 더욱 두드러지는데, 슈라우드 부근에서의 압력 강하 정도가 더욱 커지며 최소압력 지점이 선단 주변으로 이동함을 확인할 수 있다(백색 선 참고). 이에 따라 슈라우드 주변에서의 압력분 포의 변화가 전압력 상승을 유도하였음을 확인할 수 있다. Fig.13b에서, 끝단 와류 형상의 가시화에는 Q-criterion<sup>(19)</sup> 이 이용되었으며, 와류는 Q=0.0005Qmax 를 이루는 등가면을 이용하여 가시화되었다. 모든 유량 조건에서 초기 형상과 최 적 형상에서의 끝단 와류 형태가 큰 차이를 보이지 않으나, 최적 형상에서의 끝단 와류 길이가 초기 형상의 그것보다 다 소 짧음을 확인 가능하며, 이는 최적 형상에서 끝단 와류로 인하여 발생하는 누설손실이 초기 형상에서 손실보다 적음 을 의미한다. 이러한 끝단 와류로 인한 누설손실 감소 양상 은 최적 형상에서의 효율 평균의 개선에 영향을 준 주요 원 인으로 판단된다. 이러한 유동장과 성능 곡선에서 확인되는 경향성에 의해 예측모델 기반 최적설계 결과가 합당함을 확 인하였다.

# 7.결론

PIAnO S/W를 통하여 구성된 예측모델을 이용하여, AIDesigner sim S/W의 multi-stage design optimization 을 통하여 축류 송풍기의 최적해 집합을 탐색하고 이에 대한 유동장 분석을 통하여 압력 및 효율 상승이 합리적임을 확인 하였다. 본 논문의 최적설계 결과 다음과 같은 결론이 도출되 었다.

첫째, 최적설계 결과 파레토최적 내에서 목적함수가 0% (*Eff*)-19%(σ<sub>Eff</sub>) 개선되었다.

둘째, 성능지수 상충성은 주로 SetBM에 의해 결정되었다. 셋째, 유동장분석 결과 슈라우드 주변의 압력강하( $\overline{n}$ )와 끝 단와류 크기 감소( $\overline{Eff}$ )가 성능개선의 원인임을 확인하였다.

# 후 기

본 연구는 2025년도 산업통상자원부(MOTIE)의 재원으로 한국에너지기술평가원(KETEP)의 지원을 받아 수행한 연구 과제(2021202080026D, AI/ICT 기반 가변형 유체기기 설계 ·상태진단을 위한 기반·플랫폼 기술 및 운영관리 시스템 개발)입니다.

#### References

- Janus, J. M., and Whitfield, D. L., 1986, "Advanced 3.-D Viscous SSME Turbine Rotor Stator CFD Algorithms," NAS8-36486.
- (2) Heo, M. W., Ma S. B., Shim, H. S., and Kim, K. W., 2016, "High–Efficiency Design Optimization of a Centrifugal Pump," Journal of Mechanical Science and Technology, Vol. 30, No. 9, pp. 3917–3927.
- (3) Sarmiento, A. L. E., Camacho, R. G. R., Oliveira, W., Velasquez, E. I. G., Murthi, M., Gautier, N. J. D., 2021, "Design and Off–Design Performance Improvement of a Radial–Inflow Turbine for ORC Applications Using Metamodels and Genetic Algorithm Optimization," Applied Thermal Engineering, Vol. 183, 116197.
- (4) Sinnette Jr., J. T., and Costello, G. R., 1951, "Possible Application of Blade Boundary–Layer Control to Improvement of Design and Off–Design Performance of Axial–Flow Turbomachines," NACA Technical Note 2371, Washington.
- (5) Shi, L. J., Tang, F. P., Liu, C., Xie, R. S., and Zheng, W. P., 2016, "Optimal Design of Multi-Conditions for Axial Flow Pump," IOP Conf. Series: Earth and Environmental Science, Vol. 49, No. 6, pp. 1–9.
- (6) Heo, M. W., Ma S. B., Shim, H. S., and Kim, K. W., 2019, "A Study on the Effects of Rotation Rate and Flow Rate on the Operating Characteristics in Centrifugal Pump," Fire Science and Engineering, 2019, Vol.33, No.3, pp. 56–62.
- (7) Schaefer, J. W., Sagerser, D. A., and Stakolich, E. G., 1977, "Dynamics of High–Bypass–Engine Thrust Reversal Using a Variable–Pitch Fan," National Aeronautics and Space Administratin. Washington, D. C.

- (8) Jeon, S. T., Cho, J. P., 2013, "Effect of pitch angle and blade length on an axial flow fan performance," Journal of the Korea Academia–Industrial cooperation Society, Vol. 14, No. 7, pp. 3170–3176.
- (9) Ko,, J. H., Sitorus., P. E., and Kim J., H., 2019. "Effect of Variable Shape Blade on the Performance of Darrieus Turbine." Journal of the Korean Society for Marine Environment & Energy, Vol. 22, No. 1, pp. 1–7,
- (10) FanDAS 2017, KWT Solution Inc.
- (11) ANSYS CFX 22.1, ANSYS Inc.
- (12) Menter, F. R., 2009, "Review of the shear-stress transport turbulence model experience from an industrial perspective," International Journal of Computational Fluid Dynamics, Vol. 23, No. 4, pp. 305–316.
- (13) Celik, I. B., Ghia, U., Roache, P. J., & Freitas, C. J., 2008, "Procedure for estimation and reporting of uncertainty due to discretization in CFD applications," Journal of fluids Engineering–Transactions of the ASME, Vol. 130, No. 7, 078001.
- (14) PIAnO (Process Integration, Automation and Optimization) 2025 User's Manual, 2024, PIDOTECH Inc.
- (15) AIDesigner sim 2025 User's Manual, 2024, PIDOTECH Inc.
- (16) Jin R., Chen, Y., and Simpson, T. W, "Comparative Studies of Metamodeling Techniques Under Multiple Modeling Criteria, ", Structural and Multidisciplinary Optimization, AIAA-2000-4801
- (17) Deb, K., Pratap, A., Agarwal, S., and Meyarivan, T., 2002, "A Fast and Elitist Multiobjective Genetic Algorithm: NSGA–II," IEEE Transactions of Evolutionary Computation, Vol. 6, No. 2, pp. 182–197.
- (18) Geller, W., 1976, "Calculation of the Turning Angle of Two-Dimensional Incompressible Cascade Flow," AIAA Journal, Vol. 14, No.. 3, pp.176–177
- (19) Hunt, J. C. R., Wray, A. A., and Moin. P., 1988, "Eddies, Streams, and Convergence Zones in Turbulent Flows, "Center for Turbulence Rereomh Proceedings of the Summer Program 1988, pp. 193–208.